Populační ekologie

Matice a dif rovnice - nalévárna

Pavel Fibich

pavel.fibich@prf.jcu.cz

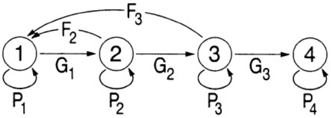
13. října 2022

Proč?

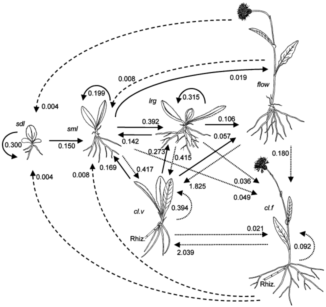
Proč povídat o maticích, diferenciálních (δR) a diferenčních rovnicích (ΔR) v kurzu Populační ekologie?

- obojí se hodí na popis a modelování dynamiky populací,
- např. přechodů mezi roky, mezi vývojovými stádii, hledání stabilního zastoupení v populaci, projekce do budoucnosti, ...

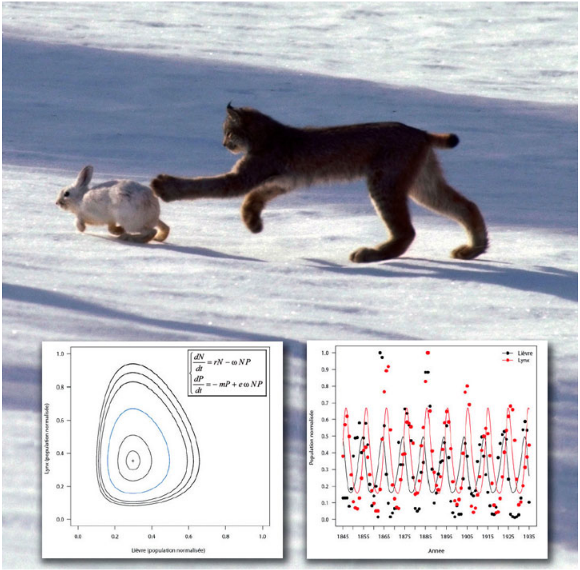
Příklady – Matice



$$\begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & 0 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$



Příklady – Diferenciální rovnice



Vektor a Matice

Vektor je veličina charakterizovaná velikostí a směrem, zn.$\vec{x}$, je to uspořádaná n-tice čísel x_i. Např.: $\vec{x}^{31}, \vec{y}^{21}, \vec{z}^{14}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ a * b \\ i \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z} = (5\ 3\ 9\ 1)$$

Matice je charakterizovaná počtem řadků a sloupců. Skládá se z vektorů. Např. A^{32}, E^{33}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé prvky matice se odkazují indexy, a_{ij} je prvek na i-tém řádku a v j-tém sloupci.
Hodí se na zápis lineárního zobrazení, řešení obyčejných δR, **k vyjádření soustavy lineárních rovnic**, …

Matice

Vyjádření soustavy linearních rovnic, např.

$$
\begin{array}{rrrcl}
3 * x & -y & +z & = & 3 \\
-x & & -z & = & 2 \\
x & +8 * y & -2 * z & = & 0
\end{array} \qquad (1)
$$

maticově (neznámé a pravé strany jsou vektory)

$$
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Zkrácený zápis $A * \vec{n} = \vec{b}$. Když jsou pravé strany nulové, říkáme že je soustava **homogenní**.

Operace s maticemi a vektory

Vektory jdou

- $\vec{a}^{21} + \vec{b}^{21} = \vec{x}^{21}$ sčítat, jsou-li kompatibilní
- $\vec{a}^{31} * c = \vec{x}^{31}$ násobit skalárem,
- $\vec{x}^{m1} * \vec{y}^{1n} = A^{mn}, \vec{x}^{1n} * \vec{y}^{n1} = c$ násobit mezi sebou, ...

Matice jdou

- $A^{mn} + B^{mn} = C^{mn}$ sčítat jsou-li stejných rozměrů
- $A^{mn} * c = C^{mn}$ násobit skalárem (číslem)
- $A^{mn} * \vec{b}^{n1} = \vec{c}^{m1}$ násobit kompatibilním vektorem
- $A^{mn} * B^{nk} = C^{mk}$ násobit mezi sebou mají-li společný rozměr
- $(A^{mn})^T = A^{nm}$ transponovat (převracet)
- A^{-1} invertovat (hledat opačnou matici), ...

Operace s maticemi

Sčítání matic je komutativní. $A^{mn} + B^{mn} = C^{mn}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Násobení matice skalárem je komutativní. $A^{mn} * c = C^{mn}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} * 3 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Násobení matice vektorem není komutativní. Pro $A^{mn} * \vec{b}^{n1} = \vec{c}^{m1}$ je definováno jako $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Násobení matice vektorem je speciální případ násobení dvou matic. Vzorec pro výpočet zůstává stejný.

`http://wims.unice.fr/wims/en_tool~linear~matmult.html`

Co nás u matic zajímá

Hrubá charakteristika matice (jedno, málo čísel).
Determinant zn. det A, $|A|$

- čtvercové matici *n x n* přiřadíme číslo (skalár),
- absolutně odpovídá škálování objemu daného linearní transformací kterou matice popisuje,
- počítá se pomocí Sarrusova pravidla (jen velikosti 2x2 a 3x3), Leibnizovým vzorecem (libovolná)

Charakteristická rovnice je dána $|A - \lambda * E| = 0$, např.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = |A - \lambda * E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3 * \lambda + 2$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastní (charakteristická) čísla jsou kořeny charakteristické rovnice, zn. λ_i
Vlastní vektor je vektor $\vec{u}$ který vyhovuje rovnici

$$(A - \lambda * E) * u = 0$$

Vlastní číslo má svůj vlastní vektor. Nebo jinak

$$A * \vec{u} = \lambda * \vec{u}$$

$\vec{u} \neq 0$ je vlastní vektor a λ je vlastní číslo.

Vlastní vektory se v ekologii používají jako charakteristika **stabilní (např. věkové) struktury** pro danou přechodovou matici.

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = |A - \lambda * E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3 * \lambda + 2$$

Kořeny rovnice jsou $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$, a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -1 \\ 2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} * u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} * u_1$$

řešením je např. vektor $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Podobně je třeba dopočítat vlastní vektor pro λ_2.

Power iteration (method)

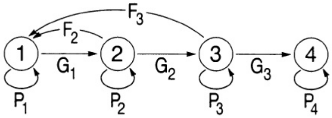
Metoda počítající vlastní čísla a vektory bez rozkladu (nepočítá determinant). Tato metoda najde jen dominantní (největší) vlastní číslo a k němu náležící vlastní vektor. Výpočet probíhá v iteracích

$$b_{k+1} = \frac{Ab_k}{||Ab_k||}$$

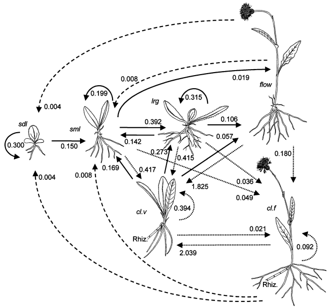
Začíná se nenulových b_0 a v každém kroku se výsledek normalizuje.

Jde použít i na velké matice, ale může konvergovat pomalu. Používá ji Šuspa, Google (PageRanks) i Twitter (recommendations).

Příklady



$$\begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & 0 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$



Shrnutí matic

- Matice se skládá z řádků a sloupců
- S maticemi jdou provádět základní aritmetické operace
  - které ale často nesplňují komutativní zákon
  - nebo nejsou vůbec definovány kvůli nekompatibilní velikosti
- S maticemi jde lehce pracovat v matematickém softu (R, Matlab, ...)
- Vlastní vektory a vlastní čísla charakterizují matici, v ekologii charakterizují stabilní (věkovou, velikostní) strukturu.

Literatura a odkazy

- `http://www.kwon3d.com/theory/vectmat.html`
- On-line výpočet `http://wims.unice.fr/wims/en_tool~linear~matmult.html`
- `http://www.facstaff.bucknell.edu/mastascu/eLessonsHTML/Circuit/MatVecMultiply.htm`

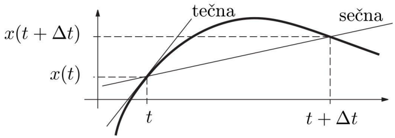
Úvodní pojmy

Směrnice k přímky $y = k * x + q$

- udává poměr změny veličiny y a při změně x
- k určuje zda je přímka (y) klesající/rostoucí/nezávislá na x

Derivace funkce $x(t)$ vyjadřuje změnu funkce $x(t)$ (jejího výsledku, obrazu) vzhledem ke změně parametru t

- značíme $\frac{dx}{dt}$ nebo často jen zkráceně x' (tj. když víme podle čeho derivujeme)
- $x'(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$
- je směrnice tečny v bodě
- např. rychlost = derivace vzdálenosti podle času



Diferenciální rovnice (δR)

δR je matematická rovnice tvaru

$$y'(t) = f(t, y)$$

v níž neznámou (řešením) je funkce (y). Derivace této funkce (y') a případně samotná funkce je také obsažena v rovnici. Za **řešení** (integrál) δR považujeme každou funkci y, která vyhovuje δR.

Příklady:

- $y' = r * y$, řešení $y(t) = y_0 * e^{r*t}$
- $dy/dt = r * y(1 - y/K)$, řešení $y(t) = \frac{K*y_0}{y_o+(K-y_o)*e^{-r*t}}$

Uvedené δR mají nekonečně mnoho řešení, proto často uvádíme **počáteční podmínky** $y(t_0) = y_0$ (např. $y(0) = 5$). **Pravá strana δR říká jak se y mění.**

Typy a řešení δR

Říkáme, že δR je 1., 2., ... **řádu** pokud obsahuje 1., 2., ... derivaci neznámé funkce.

Typy *DR* dle derivace

- obyčejné δR obsahují derivace hledané funkce jen podle jedné proměné,
- parciální δR obsahují derivace hledané funkce podle více proměných

Typy δR dle pravé strany

- se separovanými proměnými, homogenní, ...

Řešení

- obecné nebere v úvahu počáteční podmínky,
- parciální musí splňovat počásteční podmínky

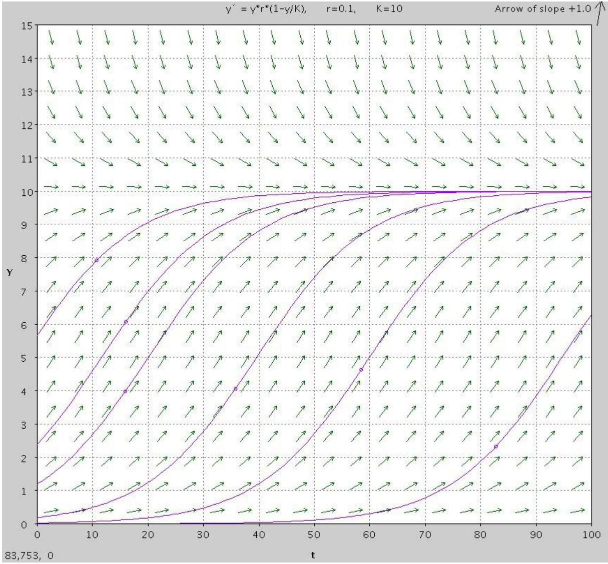
Geometrický význam $y' = f(t, y)$

V každém bodě (t^*, y^*) v rovině dané osami t a y je dána hodnota $f(t^*, y^*)$

- která udává derivaci fce $y(t)$, která je řešením δR a platí $y(t^*) = y^*$ v bodě t^* a současně je tedy směrnicí tečny v bodě t^*
- směrnicí je jednoznačně zadán směr tečny
- můžeme tak nakreslit v každém bodě (t^*, y^*) šipku (čárku) se směrnicí $f(t^*, y^*)$

Výsledný obrázek je **směrové pole.**

Směrové pole $y' = y * r * (1 - y/K)$



Řešíme δR

Jak řešit $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$?

- **analyticky** podle pravé strany rovnice integrováním; je-li rovnice trochu složitější je to pracné nebo neřešitelné
- numericky získáme přibližné řešení, metody
  - Eulerova metoda
  - Runge-Kutta
  - Prediktor-Korektor, ...

Řešíme δR analyticky- příklad

Máme $\frac{dy}{dt} = r * y$, kde $r = b - d$ (*b*irth - *d*eath). r růst populace a y velikost populace.
Řešíme separací proměných $\frac{dy}{r*y} = dt$ a integrováním

$$\int \frac{dy}{r * y} = \int dt$$

$$\frac{1}{r} ln\, y = t + C$$

vyjádříme si postupně y

$$ln\, y = r * (t + C)$$

$$y = e^{r*(t+C)} = e^{r*c} * e^{r*t} = K * e^{r*t}$$

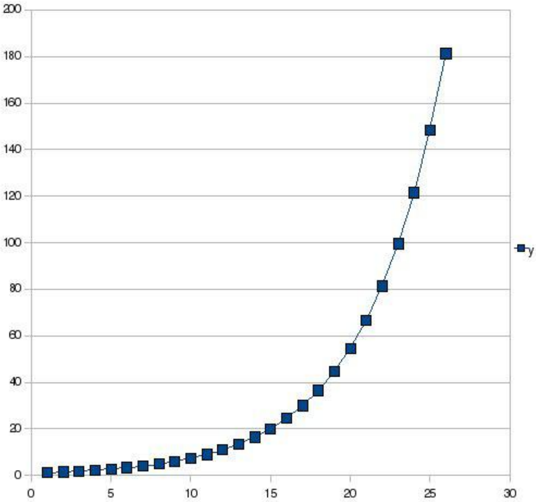
Nyní můžeme zvolit počáteční podmínky $y(t_0) = y_0$ a $t = 0$

$$y_0 = K * e^0 = K$$

Dohromady máme řešení δR ve tvaru $y = y_0 * e^{r*t}$.

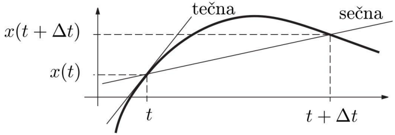
Analytické řešení $\frac{dy}{dt} = r * y$ je $y = y_0 * e^{r*t}$

		y0	1
t	y	r	0,2
1	1,22		
2	1,49		
3	1,82		
4	2,23		
5	2,72		
6	3,32		
7	4,06		
8	4,95		
9	6,05		
10	7,39		
11	9,03		
12	11,02		
13	13,46		
14	16,44		
15	20,09		
16	24,53		
17	29,96		
18	36,6		
19	44,7		
20	54,6		
21	66,69		
22	81,45		
23	99,48		
24	121,51		
25	148,41		
26	181,27		



Eulerova metoda - numerické řešení δR

Nehledáme řešení $y' = f(t, y)$ (což už víme, že je funkce y), ale použijeme **aproximaci tečnou**.
Postupujeme v diskrétních krocích Δt. V bodě (t_0, y_0) má integrální křivka tečnu o směrnici $f(t_0, y_0)$. Nahradíme-li integrální křivku tečnou, změní se na tečně veličina t o hodnotu Δt, pak se hodnota y změní o $\Delta y = f(t_0, x_0) * \Delta t$.
Pro krátký krok Δt je tato aproximace zpravidla vyhovující.



Eulerova metoda - numerické řešení

Pro bod $(t_0 + \Delta t)$ dostáváme řešení

$$y(t_0 + \Delta t) = y_0 + f(t_0, y_0) * \Delta t$$

A obecně

$$y_{t+1} = y_t + f(t_n, y_n) * \Delta t$$

Je to nejjednoduší metoda, je málo přesná. Čím menší Δt tím je přesnější, ale to znamená že musíme provést víc kroků.

Eulerova metoda - příklad v excelu

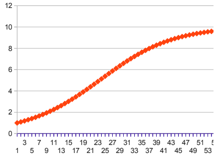
Pusťte si excel a zkusíme použít Eulerovu metodu na řešení $y' = f(t, y) = r * y * (1 - y/K)$ s počátečníma podmínkama $t_0 = 1, y_0 = 1, r = 0.1, K = 10, \Delta t = 1$

t	y	Δy
t_0	y_0	$\Delta y_0 = f(t_0, y_0) * \Delta t$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$\Delta y_1 = f(t_1, y_1) * \Delta t$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$\Delta y_2 = f(t_2, y_2) * \Delta t$
...	...	...

Sheet1

t	y	yd
1	1	0.09
2	1.09	0.097119
3	1.187119	0.104619385
4	1.291738385	0.112487958
5	1.404226343	0.120704118
6	1.524930461	0.129238917
7	1.654169378	0.138054174
8	1.792223552	0.147101703
9	1.939325255	0.156322701
10	2.095647956	0.165647392
11	2.261295348	0.174994968
12	2.436290316	0.184273927
13	2.620564243	0.193382855
14	2.813947098	0.202211727
15	3.016158825	0.210643742
16	3.226802567	0.218557709
17	3.445360275	0.225830953
18	3.671191228	0.232342672
19	3.903533901	0.237977621
20	4.141511522	0.242629975
21	4.384141497	0.246207183
22	4.63034868	0.248633579
23	4.878982259	0.249853547
24	5.128835806	0.249834013
25	5.37866982	0.248566092

y0	1
r	0.1
k	10
dt	1
t0	1



Ostatní metody pro numerické řešení *DR*

Další metody (Runge-Kutta,Prediktor-Korektor) pro numerické řešení diferenciálních rovnic jsou mnohem přesnější a jsou součástí knihoven pro matematický soft.

- Online - `http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html`
- Komerční - Matlab, Maple, Mathematica
- Volně dostupné - Maxima, SciLab, R, Octave,...

Diferenční rovnice (ΔR)

ΔR jsou diskrétní podobou diferenciální rovnic (δR). Změny jsou chápány **skokově** nikoliv spojitě jako u δR (např. jako v Eulerově metodě).
ΔR má tvar

$$y_{n+1} = f(y_n),$$

a **řešením** je každá posloupnost $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje předchozí rovnici.
Pevný bod (PB) funkce f je číslo y^* takové, že $f(y^*) = y^*$.
Posloupnost PB $y = \{y^*\}_{n=1}^{\infty}$ je řešením ΔR.
Rozlišujeme 2 typy pevných bodů:

- atraktivní PB - body v jeho okolí se k němu blíží
- repulzivní PB - body v jeho okolí jsou odpuzovány

Diferenční rovnice - příklad

Aritmetická posloupnost je definována rekurentním vzorcem

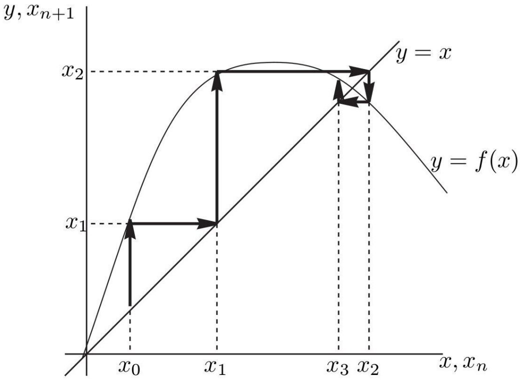
$$a_{n+1} = a_n + \Delta$$

Diference je zde $a_{n+1} - a_n = \Delta$.
Řešením diferenční rovnice je posloupnost

$$a_n = a_0 + n * \Delta$$

Řešíme ΔR

Jednoduché grafické řešení (pavučinový model).
Zakreslíme $y = f(x)$ a $y = x$.



Převod *DR* na ΔR

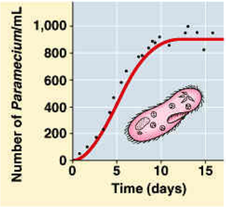
Pokud je změna v diferenicální rovnici diskrétní, můžeme aproximovat *DR* pomocí ΔR.

$$dy/dt \approx \frac{y_{t+\Delta t} - y_t}{\Delta t}$$

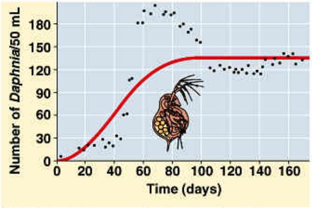
To je například pro $y' = r * y * (1 - y/K)$ a $\Delta t = 1$

$$y_{n+1} = y_n + r * y_n * (1 - y_n/K)$$

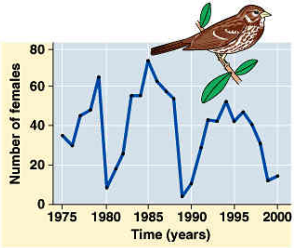
Příklady



(a) A *Paramecium* population in the lab

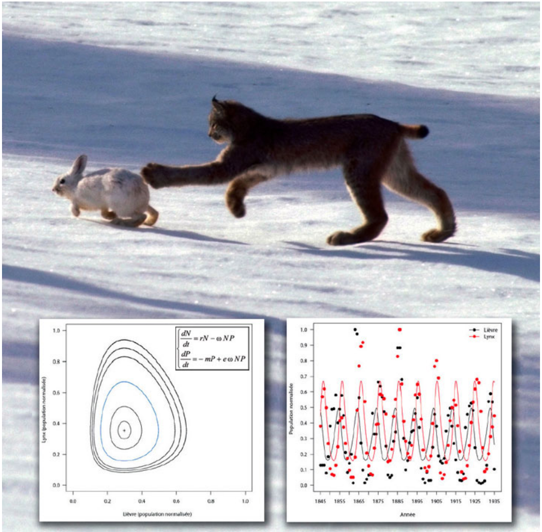


(b) A *Daphnia* population in the lab



(c) A song sparrow population in its natural habitat

lynx sleduje snowshoe



Shrnutí rovnic

- δR vyjadřují spojitou závislost, změnu (např. v čase) a jejich řešením je funkce.
- δR jdou řešit analyticky (integrováním) nebo numericky (aproximací).
- Metody pro numerické řešení jsou lehce použitélné v matematickém softu nebo často i v excelu.
- ΔR definují diskrétní (skokovou) závislost, řešením je posloupnost.
- $y' = r * y$ exponencialní růst (neomezený)
- $y' = r * y * (1 - y/K)$ logistický růst (omezený nosnou kapacitou prostředí K)

Literatura a odkazy

- Mařík R., Dynamické modely v biologii. Skripta MZLU, 2004.
- Kot M., Elements of Mathematical Ecology. Cambridge University press, 2001.
- `http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html`