Matematické modely v ekologii
a na co jsou dobré

Induktivní a deduktivní uvažování

- o Indukce - mám spoustu pozorování, a v nich se snažím nalézt zákonitosti, zobecnění atd.
- o Dedukce - mám řadu "pravd", a hledám jejich důsledky (matematika jako nejdokonalejší deduktivní systém).
- o Hypoteticko-deduktivní přístup k vědě (K. Popper).

Teorie - deduktivní systém

- o Explikativní funkce (má za úkol vysvětlit).
- o Prediktivní funkce (je schopná predikovat, co bude za podmínek, které jsme ještě nevyzkoušeli).

- o Matematika jako deduktivní systém
- o Ale - každá teorie nemusí být nutně matematická

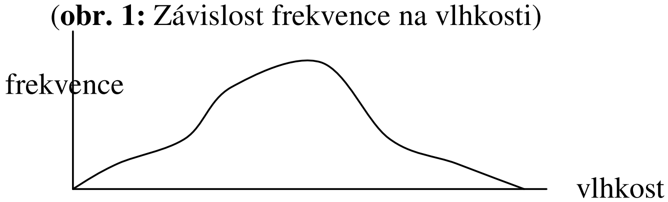
Systémy, které modeluji, jsou vždy nějakou abstrakcí, kterou si definuji na reálném objektu.

Typy modelů:
* Verbání vs. formalizované (většinou matematikou)

* Statistické vs. **dynamické** ⇒ obvykle se pro ně používá systém diferenčních nebo diferenciálních rovnic

⇓

model odpovědi druhu
(**obr. 1:** Závislost frekvence na vlhkosti)



Věrnost, přesnost, obecnost

- o Věrnost - jak dobře vystihuje mechanismy
- o Jak dobře predikuje vývoj v čase
- o Kolika systémů se týká

Většinou jsou rozumně splněny jen dva ze tří požadavků

Modely teoretické ekologie jsou hlavně obecné, často i věrné, přesnost není prvořadá.

Modely aplikované ekologie – u nich je důležitá přesnost, potom i věrnost.

Modely deterministické vs. stochastické
Každý reálný objekt podléhá stochastickým (tj. námi neměřeným) vlivům. Při modelování se rozhodujeme, jak je pro nás stochasticita důležitá

Např.: Sleduji, zda vyhyne populace, když má každé individuum 50% pravděpodobnost přežití.

1. Populace ohroženého druhu, čítající 10 individuí
(stochasticitu asi musím vzít v úvahu, šance, že vyhyne je $0,5^{10}$=0.000977, což je sice málo, ale asi bych to neměl ignorovat)
2. Populace druhu s 10 000 individui. Šance, že vyhyne, je $0,5^{10000}$=0,00000000000...

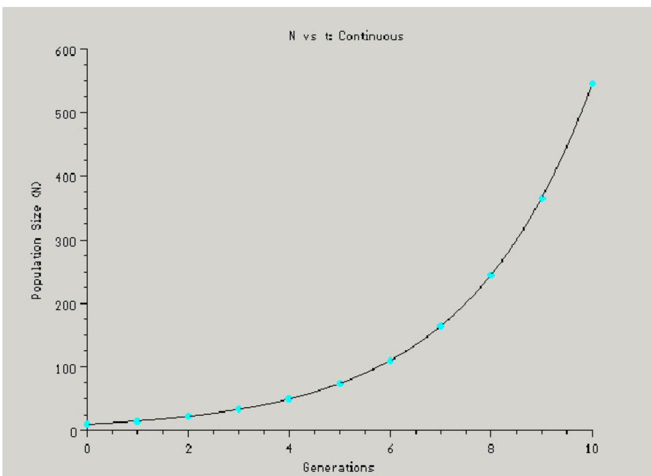
Modely analyticky řešitelné vs. simulační

- Analyticky řešitelné - dostávám úplné řešení, ale jsem omezen ve složitosti rovnic.
- Simulační - mohu si vymyslet rovnice, jak chci složité, ale dostávám řešení pouze numerické a pro dané počáteční podmínky.

Modelování: populační růst

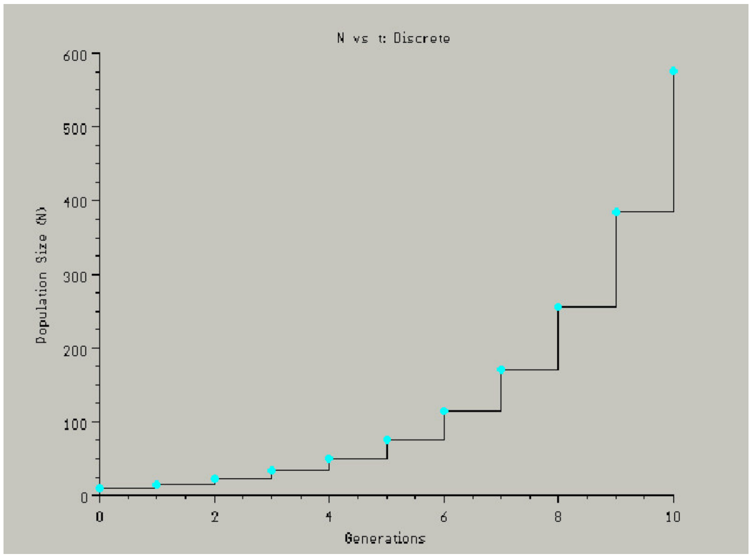
Hustotně nezávislý růst populace neomezený – exponenciální funkce
Diferenciální rovnice:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$



Obr. 2: hustotně nezávislý exponenciální růst populace

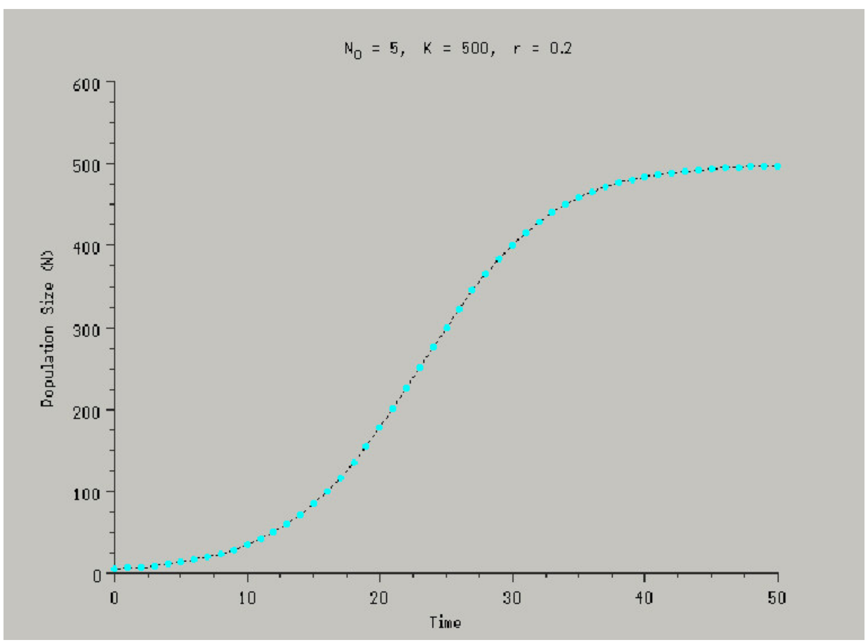
Diferenční rovnice - Diskrétní forma rovnice: $r = \ln(\lambda)$



$$N_t = \lambda N_{t-1}$$
$$\lambda = 1 + b - d$$

Obr. 3: Hustotně nezávislý diskrétní růst

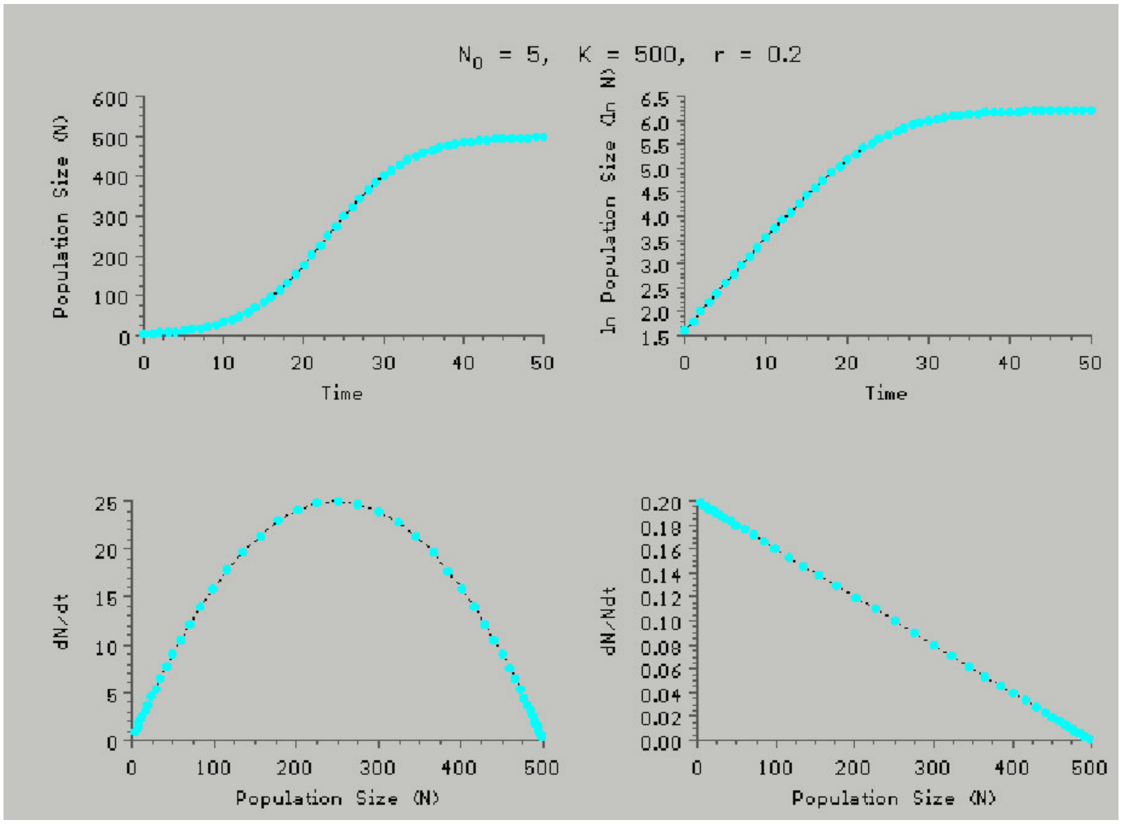
Hustotně závislý růst populace – logistický:



Obr. 4: Hustotně závislý logistický růst

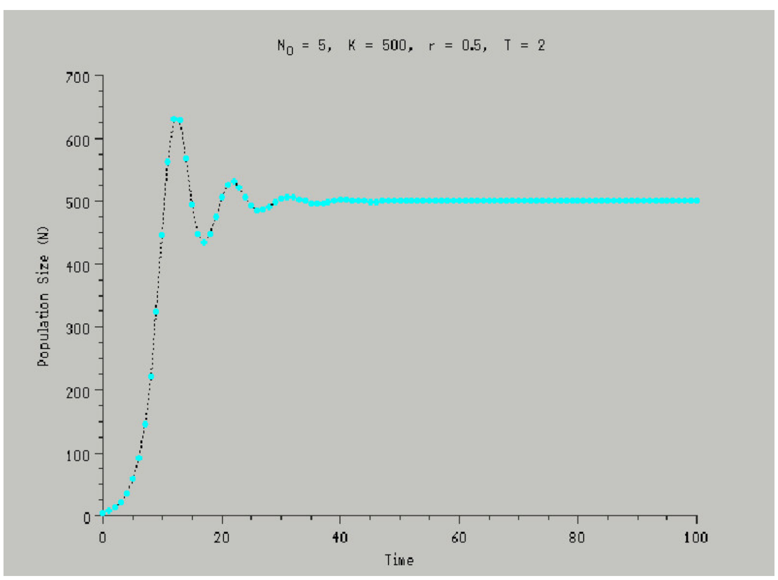
$$\frac{dN}{dt} = rN\,\frac{K}{}$$

první N na pravé straně rovnice má za následek kladnou zpětnou vazbu, druhé N na pravé straně rovnice má za následek zápornou zpětnou vazbu.

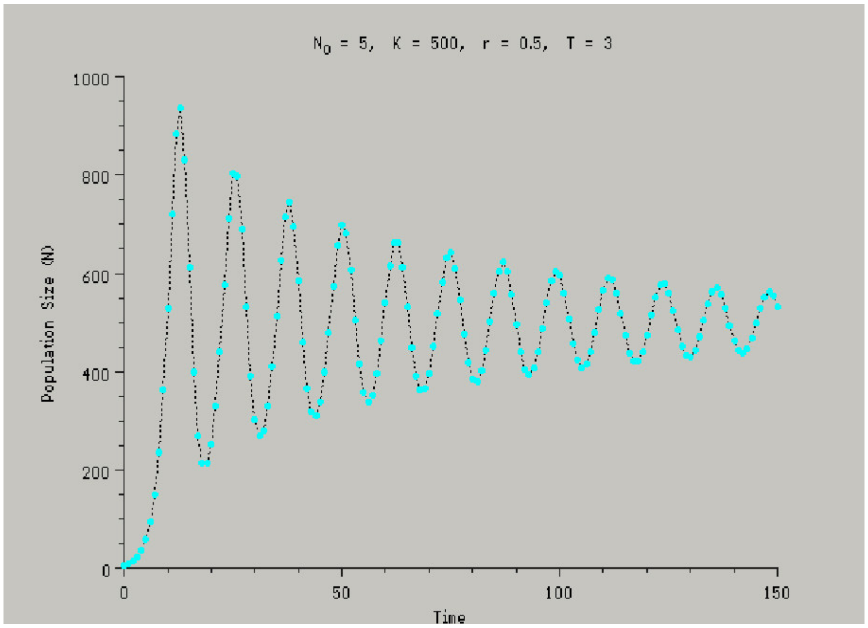


Obr. 5: z těchto vztahů mimo jiné vyplývá, kdy nastane nejmaximálnější přírůstek za časovou jednotku, a tudíž i nejvhodnější čas ke sklizni či lovu dané populace.

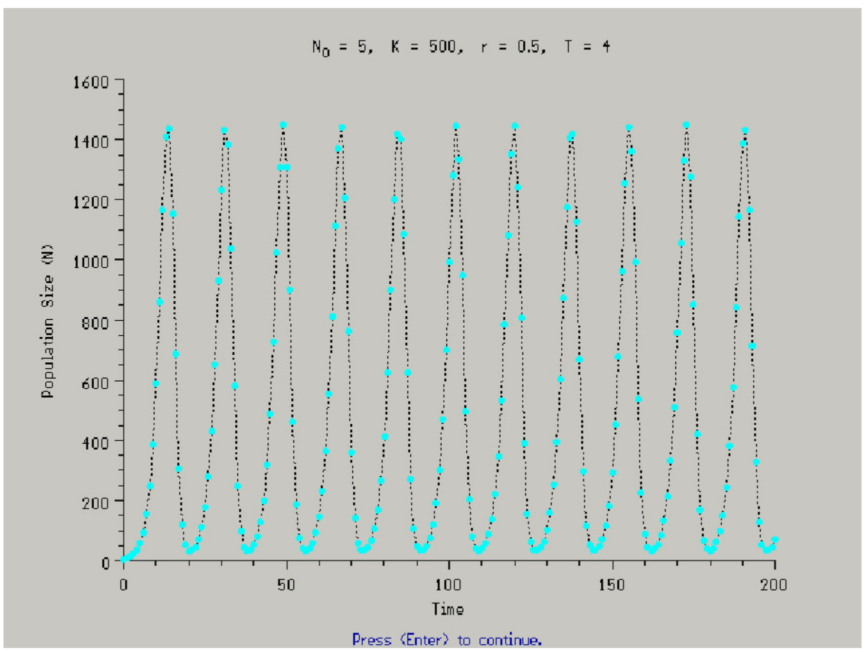
Zpoždění způsobuje fluktuace - nedřív tlumené: $\frac{dN}{dt} = rN\frac{K - N_{t-D}}{K}$



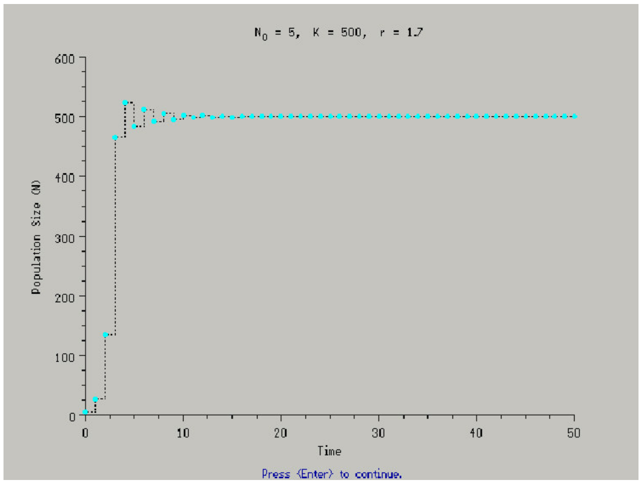
Obr. 6: tlumené fluktuace



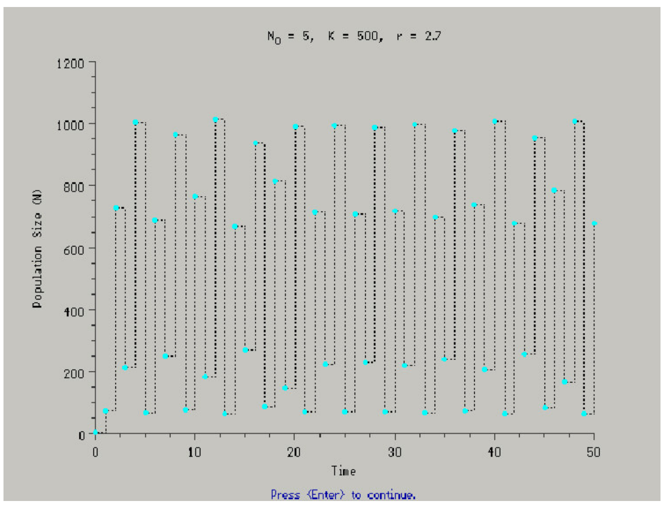
Obr. 7: Čím větší zpoždění, tím menší tlumení

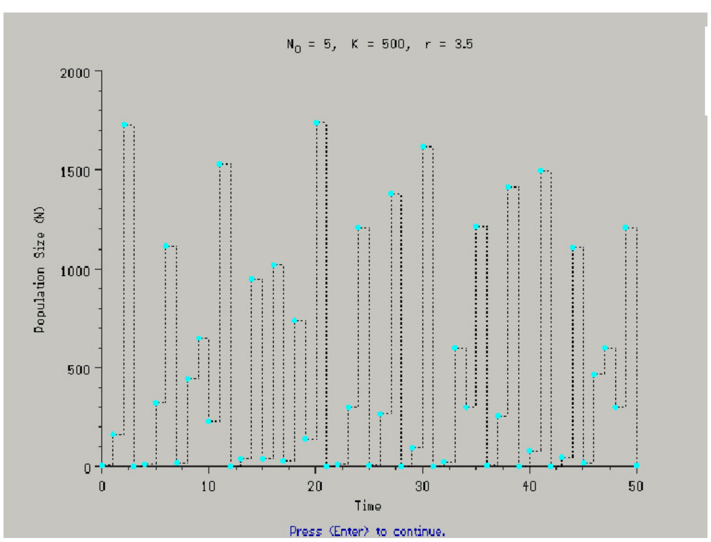


Obr. 8: Až jsou nakonec oscilace netlumené.

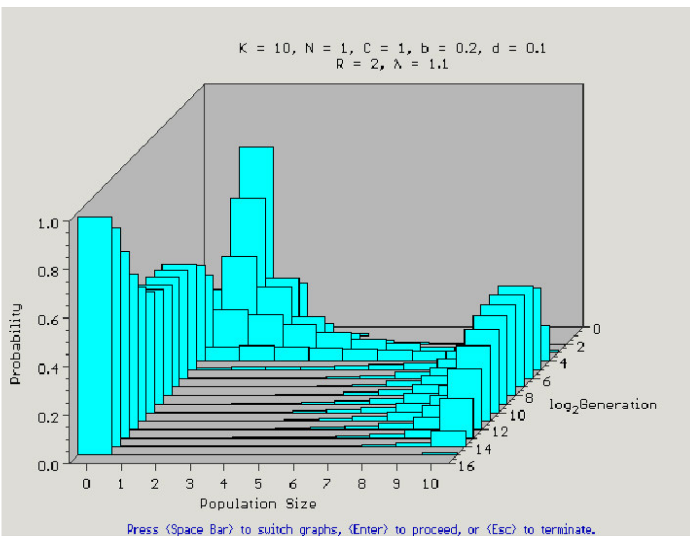


Obr. 9 a 10: Diskrétní logistická rovnice se zvětšující se rychlostí růstu (krok je jednotka času, takže čím větší rychlost, tím větší zpoždění)

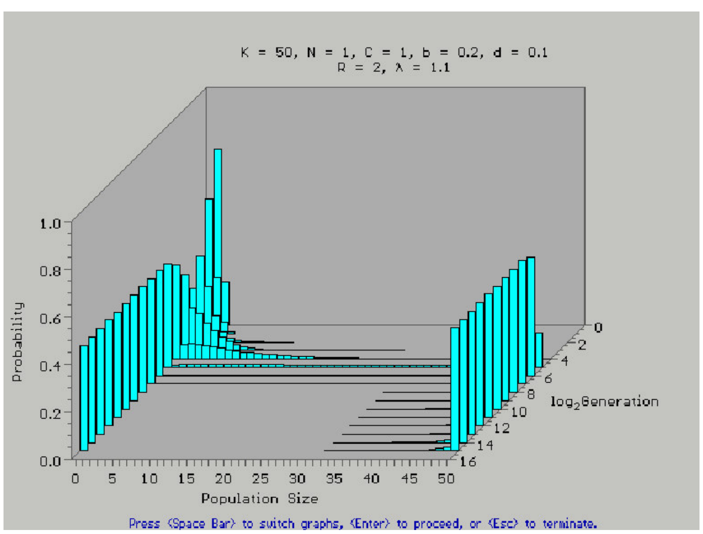




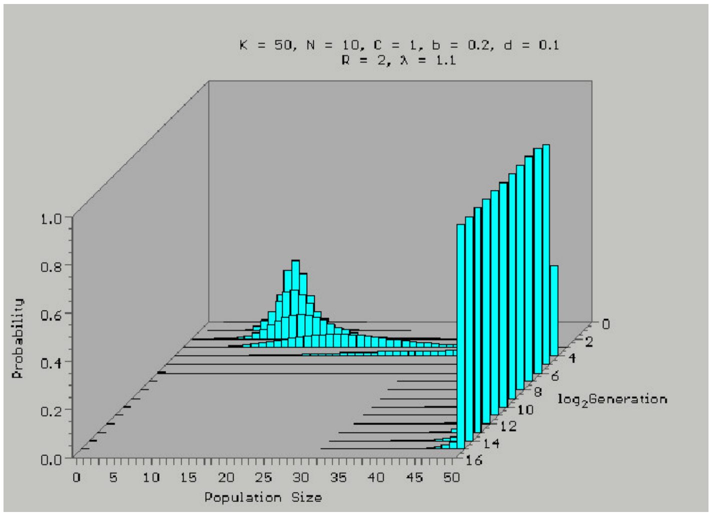
Obr. 11: Deterministický chaos



Obr. 12: Demografická stochasticita - *b* a *d* jsou pravděpodobnosti



Obr. 13: Pokud je vyšší K



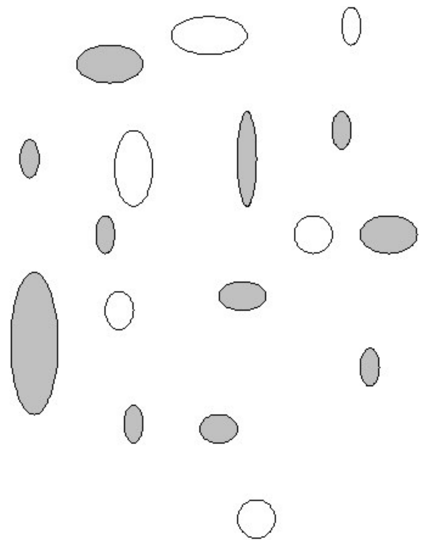
Obr 14: Pokud je vyšší počáteční velikost populace

Populace v krajině – metapopulace čili populace populací
Levinsův model :

$$\frac{dP}{dt} = -Pe + P(1-P)c$$

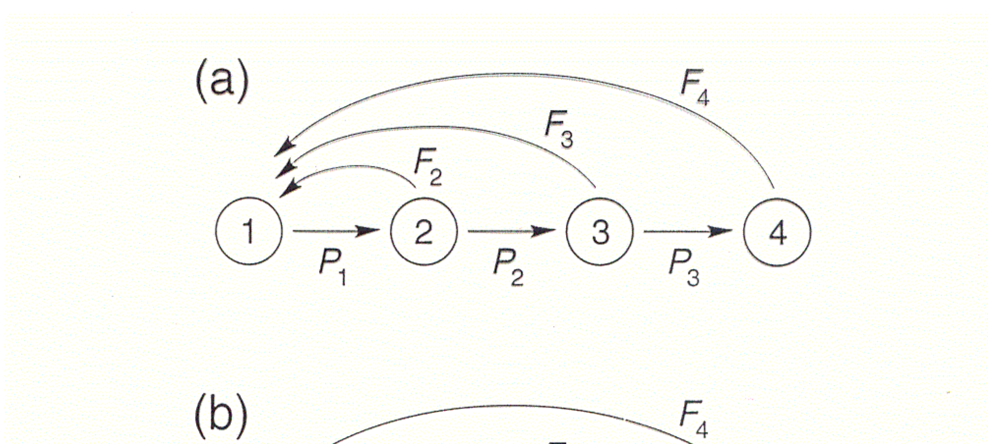
$$P^{*} = 1 - \frac{e}{c}$$

P... počet obsazených míst v krajině
1 – P...počet vhodných neobsazených míst v krajině
e ...extinkce populace
c...kolonizace nového místa



Tento model předpokládá, že všechna potenciálně vhodná místa k obsazení jsou stejně kvalitní a stejnou měrou dosažitelná pro případnou kolonizaci.

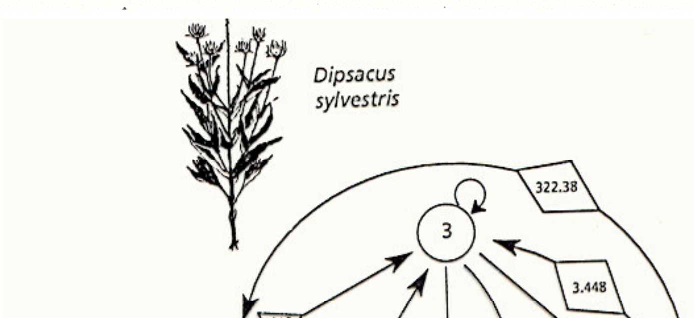
Strukturované populace - maticové modely
- Věková struktura vs. velikostní struktura
- Individua nejsou stejná, každý ročník (či vývojové stádium) má jinou pravděpodobnost přežití do dalšího ročníku (stádia), a také má jinou plodnost.



Obr. 15 a 16: a) model životního cyklu, kde jednotlivá stádia-ročníky mají přesně dané intervaly – P je pravděpodobnost přechodu do dalšího stádia-ročníku, F je plodnost, b) model, kdy mají jednotlivá stádia různě dlouhé trvání, P je pravděpodobnost přežití do dalšího roku ve stejném stádiu, G je pravděpodobnost přechodu v příštím roce do dalšího stádia, F je plodnost. Dole je matematicky vyjádřená matice.

$$\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & F_4 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_b = \begin{pmatrix} P_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$



Obr. 17: Model životního cyklu populace štětky plané (*Dipsacus sylvestris*) čtyřúhelníky obsahují produkci semen při přechodech mezi jednotlivými stádii, trojúhelníky obsahují pravděpodobnost přechodu mezi jednotlivými stádii (Caswell 1989).

$$\begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & F_4 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1,t} \\ N_{2,t} \\ N_{3,t} \\ N_{4,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{1,t+1} \\ N_{2,t+1} \\ N_{3,t+1} \\ N_{4,t+1} \end{pmatrix}$$

Když N je charakteristický vektor **matice A,** pak může být matice nahrazena svým charakteristickým číslem λ. N odpovídá stabilní věkové struktuře, λ je ekvivalentní λ v diskrétním modelu **exponenciálního růstu**.

Klasické maticové modely ignorují závislost na hustotě.

$$A\vec{N}_t = N_{t+1} \longrightarrow \lambda \vec{N}_t = N_{t+1}$$

Projekce vs. predikce.

Lotka-Volterra kompetiční model:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \frac{K_1 - N_1 - \alpha N_2}{K_1}$$

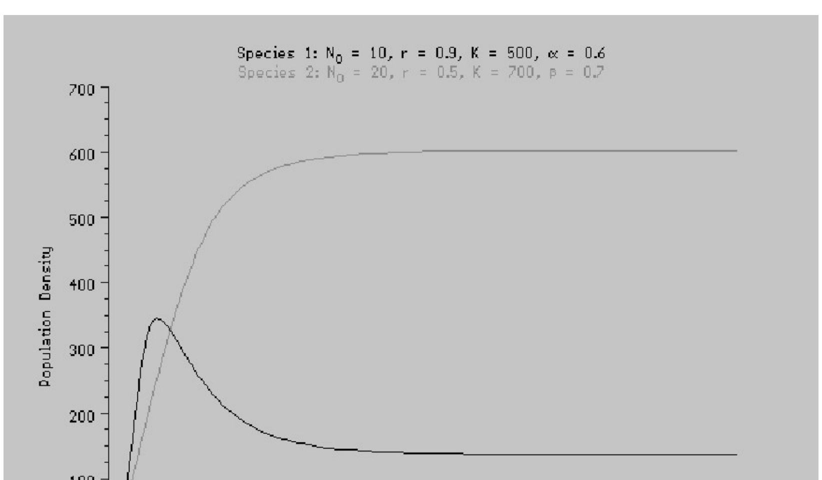
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \frac{K_2 - N_2 - \beta N_1}{K_2}$$

Stabilní equilibrium nastane, když:

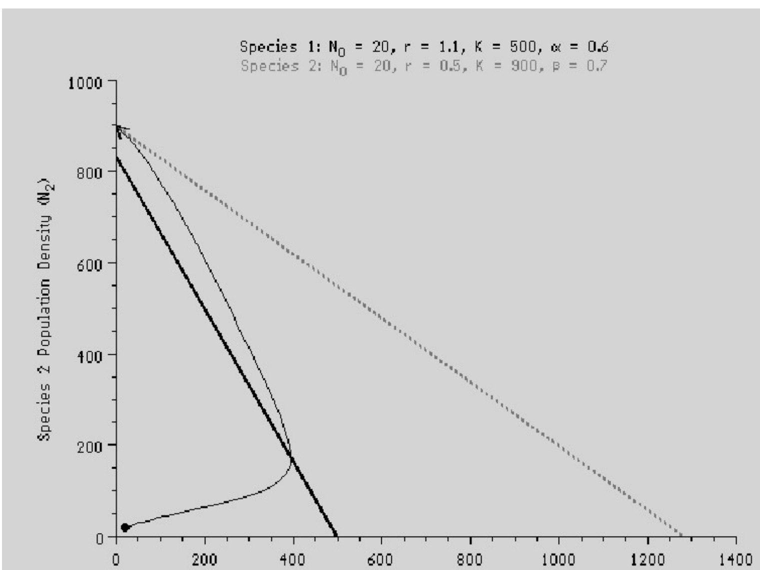
$$\alpha < K_1 / K_2$$

a

$$\beta < K_2 / K_1$$



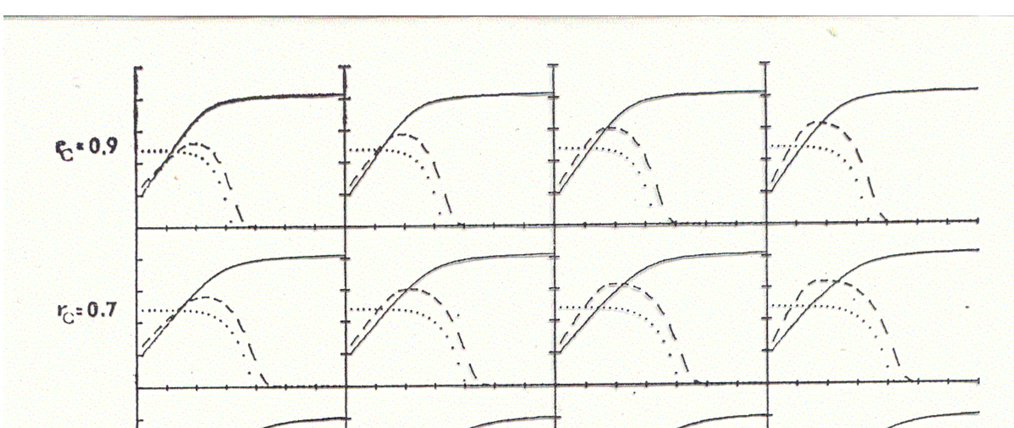
Obr. 18:



Obr. 19:

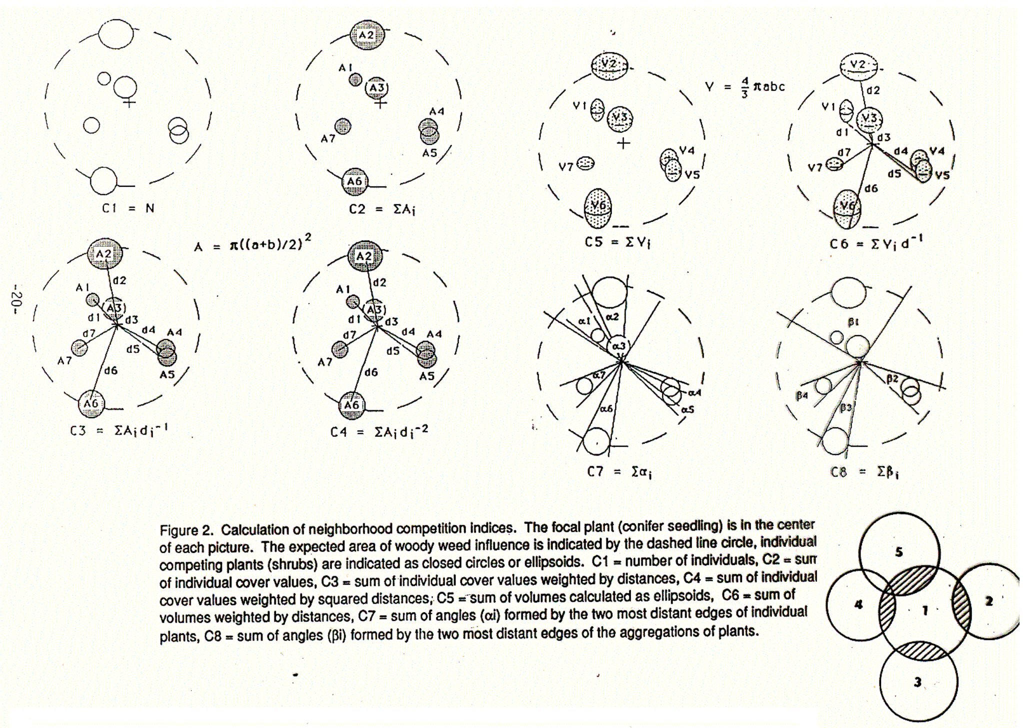
Analýza sensitivity

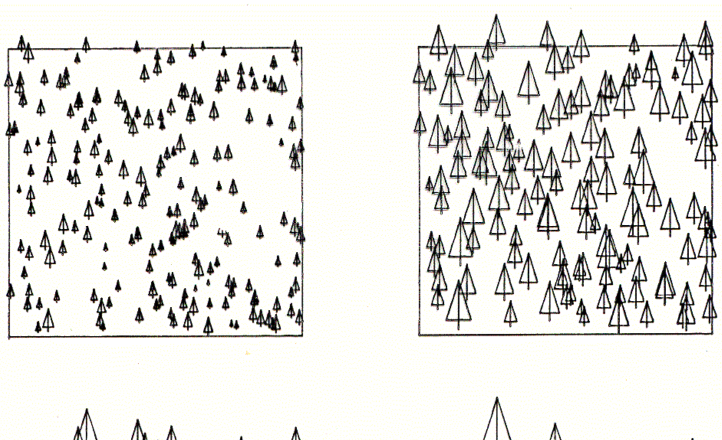
Obr. 20: Jak se mění průběh funkce v závislosti na změnách okamžitých růstových rychlostí.



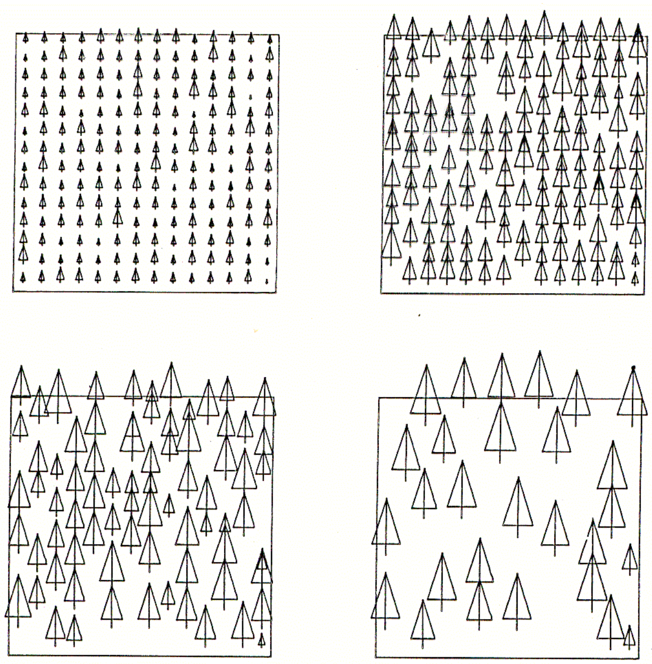
Modely založené na jedincích
- Každé individuum je popsáno stavovou proměnnou (nebo více proměnnými).
- V každém kroku, růst individua závisí na jeho velikosti, a na kompetici.
- Podobně, pravděpodobnost přežití je závislá na velikosti individua a kompetičním tlaku. Monte Carlo simulace rozhodne, zda přežije.

Spatially explicit models
Obr. 21: konkurence je závislá pouze na nejbližších sousedech.

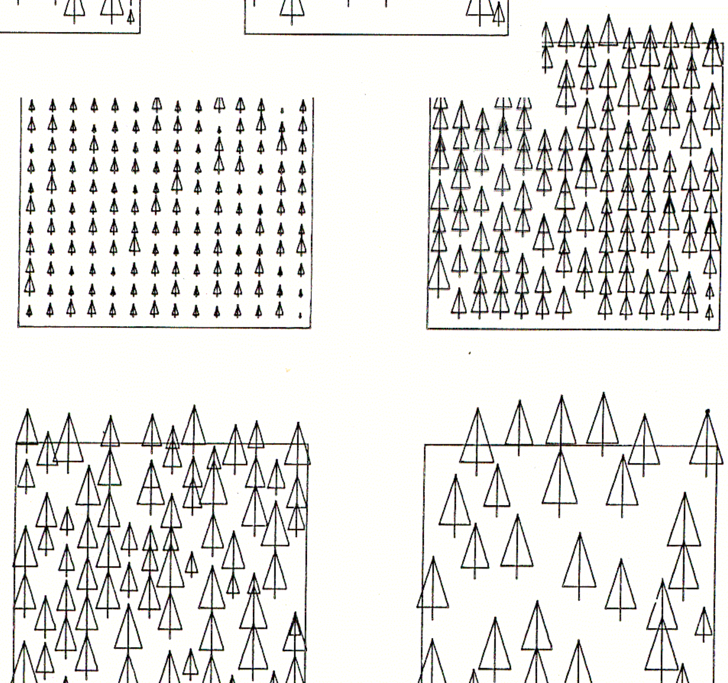




Obr. 22: Náhodné rozmístění semenáčků smrku – postupně dochází k takzvanému
sa

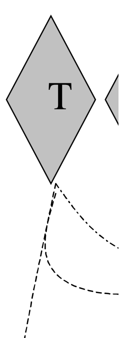


Obr. 23: P… …mozřeďování a
kompetiční … porostu je
podobný ja…



Velké ek…

obr. 24:



Mikrobní rozklad [gC]

Fotosyntéza = P.f'(T,Z)   Dýchání herbivorů=k . H

Bilanční rovnice:

$\Delta P/\Delta t$ = fotosyntéza - dýchání - co je sežráno - co odumřelo z P
$\Delta H/\Delta t$ = co je sežráno - co je prodýcháno - co odumřelo z H
$\Delta D/\Delta t$ = co odumřelo z P + co odumřelo z H
$\Delta M/\Delta t$ = co mikroorganismy sežraly z detritu - co prodýchaly
Aktivita mikrobů jako pomocná proměnná vstupuje do několika procesů (není nutná, ale ulehčuje výpočty)

Další modely - mohou být prostorově explicitní (např. pohyb vody krajinou)
Při současném vybavení počítačů mohou být značně složité

Otázka je, zda je to vždy výhoda (není), resp. kdy je to výhoda.

Na co modely používáme?

Model jako deduktivní nástroj

- struktura modelovaného systému
- hodnoty parametrů
- změny hodnot v čase

Pomocí dvou můžeme odhadnout (testovat) třetí
Máme-li strukturu modelovaného systému a hodnoty parametrů, můžeme predikovat změny hodnot v čase (nejběžnější užití v praktické ekologii - můžeme si i "vyzkoušet" management). Dobrý simulační model s grafickým výstupem je vlastně počítačová hra.

Máme-li strukturu modelovaného systému a změny hodnot v čase, můžeme odhadovat hodnoty parametrů.

Máme-li všechny tři, můžeme testovat shodu predikcí modelu s reálným chováním - nejčastěji testujeme věrohodnost struktury modelu (má různá úskalí).

Další užití - Sumarizace znalostí
Hraní si...